Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Unterrichtsfach	**Lehrplan HAK:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 2. HAK (2. Jahrgang), 4. Semester – Kompetenzmodul 4 - 1. AUL (1. Jahrgang) **Lehrplan HLW:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 4. Semester – Kompetenzmodul 4 **Lehrplan HTL:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 1. Jahrgang, 1. und 2. Semester
Schulstufe	• 10. Schulstufe (2. Jg./Klasse)
Thema	• Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck • Winkelfunktionen
Fachliche Vorkenntnisse	• Ebene Geometrie • Pythagoräischer Lehrsatz • Ähnlichkeit und Kongruenz • Griechische Buchstaben
Sprachliche Kompetenzen	• Die Bedeutung von Fachbegriffen verstehen, beschreiben und erklären können. • Selbständig fachspezifische Zusammenhänge formulieren können

Zeitbedarf	• 1–2 Unterrichtseinheiten à 50 Minuten (je nach Anzahl der eingesetzten Übungen)
Material- & Medienbedarf	–
Methodisch-didaktische Hinweise	• Sozialformen: Einzelarbeit und/oder Teamarbeit (2er oder 4er Teams) • Methodische Tools: Wortgeländer, Wortliste, Lückentext, Grafik beschreiben, Text passend zu Grafik erstellen • Die Unterlage beinhaltet mehrere unabhängige Beispiele. Diese können einzeln eingesetzt werden.
Quellen	• Timischl/Schwaiger/Hebenstreit/Teschl und Prugger: *Mathematik und Wirtschaft für HAK 2*. Wien: E. Dorner, S. 140. • Allerstorfer/Langer/Siegl: *Angewandte Mathematik@HAK 2.* Linz: Veritas-Verlag 2017 (2. Aufl.), S. 114. • Bild 10 % Steigung: ©fotolia.com/bilderzwerg
Erstellerin	Sibylle Gratt

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Aufgabe 1: Beschreibung von rechtwinkeligen Dreiecken

1a) Verwenden Sie alle Elemente des Wortkastens zur Beschriftung des vorgegebenen rechtwinkeligen Dreiecks.

C – c – δ – Ankathete von δ – Ankathete von Φ – A – a – Φ –
Gegenkathete von δ – Gegenkathete von Φ – B – b – Hypotenuse

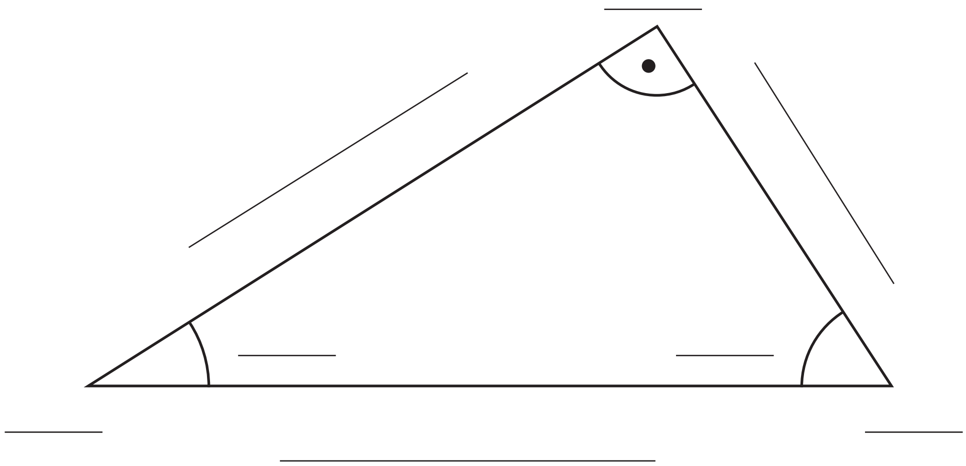

Abb. 1: rechtwinkeliges Dreieck

1b) Beschreiben Sie das Dreieck mit Hilfe folgender Satzanfänge und Phrasen in mindestens fünf ganzen Sätzen.

ist die längste Seite des Dreiecks – gegenüber dem Winkel – ist die Ankathete zum Winkel – gegenüber der Seite … – wird von .. und … eingeschlossen

1. Die Gegenkathete zum Winkel …
2. Die Hypotenuse liegt …
3. Der Winkel … liegt …
4. Die Ankathete zum Winkel …
5. Der rechte Winkel …

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Aufgabe 2: Aufstellen von Seitenverhältnissen mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken

Vervollständigen Sie den Lückentext mit folgenden Begriffen:

das Verhältnis | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ | Ankathete | Sinusfunktion | Hypotenuse | eine Zahl sin(φ) | $\tan(\varphi) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ | Ähnlichkeit | Zahlen | $\sin(\varphi) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ | Kosinusfunktion | beiden Katheten | Dividiert | Winkel Φ | Tangensfunktion | Seitenverhältnis | $\cos(\varphi) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ | Größen | Kathete

Die Zeichnung zeigt zwei ähnliche Dreiecke, deren ________ übereinstimmt. Aufgrund der _________ von Dreiecken gilt das Verhältnis $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$. In zwei beliebigen rechtwinkeligen Dreiecken mit dem gleichen Winkel Φ ist also ________ der Kathete, die Φ gegenüber liegt, zur Hypotenuse gleich.

Dieses ____________ hängt nicht davon ab, wie groß das rechtwinkelige Dreieck gezeichnet wurde, sondern nur vom Winkel Φ. Diese Überlegung kann man auch für den zweiten Winkel anstellen und man findet ein Verhältnis der zweiten _________ mit der ________ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ und der beiden Katheten zueinander _______.

Die Seitenverhältnisse eines rechtwinkeligen Dreiecks erhalten eigene Namen:

_________ man die Gegenkathete des Winkels Φ durch die Hypotenuse spricht man vom Sinus von Φ und schreibt: __________________.

Verwendet man statt der Gegenkathete die ________, so erhält man den Cosinus von Φ: ____________________.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Werden die ____________ ins Verhältnis gesetzt ergibt sich der Tangens von Φ:

______________________.

Da es sich um Verhältnisse von Längen handelt, erhält man ________ und keine ________ mit einer Einheit. Jedem Winkel Φ kann man _____________ zuordnen. Somit handelt es sich um eine Funktion – in diesem Fall die __________.

Die beiden verbleibenden Verhältnisse ergeben dann die ___________ und die____________ des Winkels Φ.

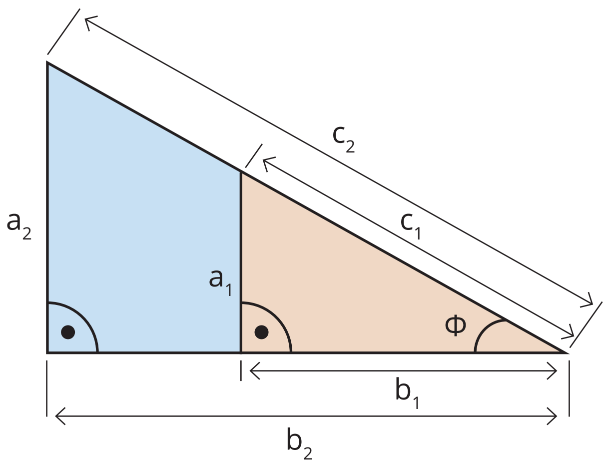

Abb. 2: Seitenverhältnisse mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken

Quelle: Timischl/Schwaiger/Hebenstreit/Teschl und Prugger: *Mathematik und Wirtschaft für HAK 2.* Wien: E. Dorner, S. 140.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Aufgabe 3: Steigung und Steigungswinkel

In der Grafik ist der Zusammenhang der Steigung in Prozent, der Steigung k und dem Steigungswinkel α dargestellt:

Abb. 3: der Steigungswinkel

Quelle: Allerstorfer/Langer/Siegl: *Angewandte Mathematik@HAK 2.* Linz: Veritas-Verlag 2017 (2. Aufl.), S. 114.

Vervollständigen Sie die folgenden Sätze. Die Grafik hilft Ihnen dabei.

1. Ist die Steigung in % angegeben, muss man ______________________________.
2. Um den Steigungswinkel α zu berechnen, muss man ________________________.
3. Multipliziert man die Steigung k mit 100 ______________________________.
4. Die Steigung k erhält man, wenn man _________________________________.
5. Aus der Steigung in % erhält man den Steigungswinkel α, indem man _____________ ____.
6. Ist der Steigungswinkel α gegeben, erhält man die Steigung in %, wenn man ________ ____.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Aufgabe 4: Verkehrsschilder

Fährt man auf österreichischen Straßen, begegnen uns häufig Verkehrsschilder wie das hier gezeigte.

©fotolia.com/bilderzwerg

4a) Überlegen Sie, wie Sie Ihrer Klasse die Bedeutung dieses Verkehrszeichens erklären können und notieren Sie Ihre Ideen.

4b) Nutzen Sie das Internet, um die größten Steigungen auf Österreichs Straßen aber auch weltweit zu finden.

4c) Überlegen Sie sich nun mit Ihrer Sitznachbarin/Ihrem Sitznachbarn ein Textbeispiel, die als Vorgabe eine Steigung in Prozent hat und bei der als Lösung der Winkel in Grad angegeben werden soll. Erstellen Sie außerdem einen Lösungsvorschlag für das Beispiel und präsentieren Sie es der Klasse.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Lösung – Aufgabe 1

1a)

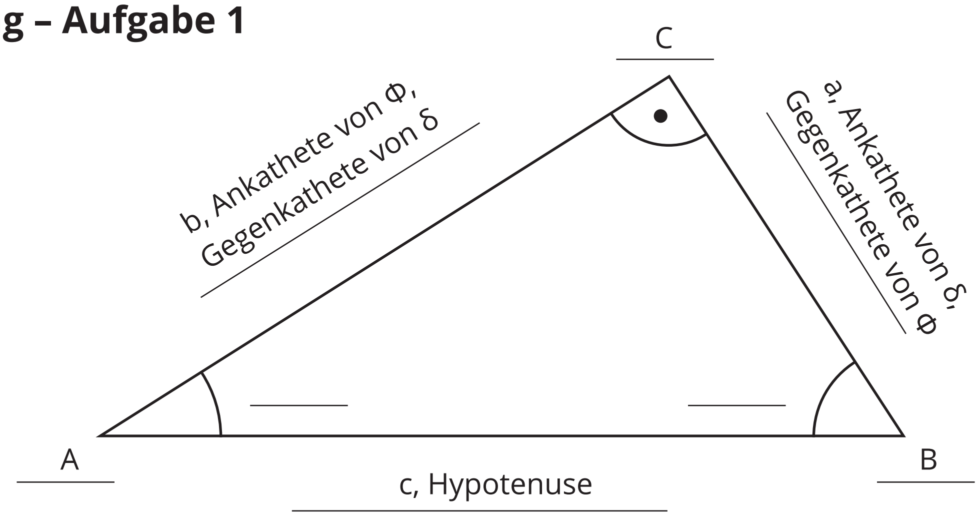

Abb. 1: rechtwinkeliges Dreieck

1b) Beispiellösung

1. Die Gegenkathete zum Winkel δ ist die Ankathete zum Winkel Φ.
2. Die Hypotenuse liegt gegenüber dem rechten Winkel und ist die längste Seite des Dreiecks.
3. Der Winkel Φ liegt gegenüber der Seite a und ist von der Hypotenuse und der Ankathete von Φ eingeschlossen.
4. Die Ankathete zum Winkel δ liegt gegenüber dem Winkel Φ.
5. Der rechte Winkel wird von den beiden Seiten a und b eingeschlossen.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Lösung – Aufgabe 2

Die Zeichnung zeigt zwei ähnliche Dreiecke, deren Winkel Φ übereinstimmt. Aufgrund der Ähnlichkeit von Dreiecken gilt das Verhältnis $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$. In zwei beliebigen rechtwinkeligen Dreiecken mit dem gleichen Winkel Φ ist also das Verhältnis der Kathete, die Φ gegenüber liegt, zur Hypotenuse gleich.

Dieses Seitenverhältnis hängt nicht davon ab, wie groß das rechtwinkelige Dreieck gezeichnet wurde, sondern nur vom Winkel Φ. Diese Überlegung kann man auch für den zweiten Winkel anstellen und man findet ein Verhältnis der zweiten Kathete mit der Hypothenuse $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ und der beiden Katheten zueinander $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Die Seitenverhältnisse eines rechtwinkeligen Dreiecks erhalten eigene Namen:

Dividiert man die Gegenkathete des Winkels Φ durch die Hypotenuse spricht man vom Sinus von Φ und schreibt: $\sin(\varphi) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

Verwendet man statt der Gegenkathete die Ankathete, so erhält man den Cosinus von Φ: $\cos(\varphi) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

Werden die beiden Katheten ins Verhältnis gesetzt ergibt sich der Tangens von Φ: $\tan(\varphi) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$.

Da es sich um Verhältnisse von Längen handelt, erhält man Zahlen und keine Größen mit einer Einheit. Jedem Winkel Φ kann man eine Zahl sin(φ) zuordnen. Somit handelt es sich um eine Funktion – in diesem Fall die Sinusfunktion.

Die beiden verbleibenden Verhältnisse ergeben dann die Kosinusfunktion und Tangensfunktion des Winkels Φ.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Lösung – Aufgabe 3

1. Ist die Steigung in % angegeben, muss man durch 100 dividieren um die Steigung k zu erhalten.
2. Um den Steigungswinkel α zu berechnen, muss man den arctan(k) oder $\tan^{-1}$(k) berechnen.
3. Multipliziert man die Steigung k mit 100 erhält man die Steigung in %.
4. Die Steigung k erhält man, wenn man den tan(α) berechnet.
5. Aus der Steigung in % erhält man den Steigungswinkel α, indem man zuerst durch 100 dividiert und danach den $\tan^{-1}$(k) bildet.
6. Ist der Steigungswinkel α gegeben, erhält man die Steigung in %, wenn man k über den tan(α) berechnet und anschließend mit 100 multipliziert.

Lösung – Aufgabe 4

Straße	**Steigung**
Großglockner-Hochalpenstraße (Österreich)	18% (maximal), 9% (Durchschnitt)
Arlberg-Passstraße (Österreich)	12.4% (maximal), 6% (Durchschnitt)
die Baldwin Street (Dunedin / Neuseeland)	35%
Lombard Street (San Francisco / USA)	27%