Reelle Funktionen

Unterrichtsfach	Mathematik
Schulstufe	• 10. Schulstufe (6. Klasse AHS)
Thema	• Reelle Funktionen
Fachliche Vorkenntnisse	• Grundbegriffe der Funktionen aus der 9. Schulstufe
Fachliche Kompetenzen	• Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen • und Exponentialfunktionen • Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen)
Sprachliche Kompetenzen	• Mathematische Zusammenhänge erkennen und schriftlich formulieren können • Die Bedeutung von Fachbegriffen verstehen können • Mathematische Ausdrücke in Texte umsetzen können • Selbstständig mathematische Zusammenhänge formulieren können

Zeitbedarf	• ca. 2 Unterrichtseinheiten à 50 Minuten
Material- & Medienbedarf	–
Methodisch-didaktische Hinweise	• Methodenwerkzeuge/Sprachhilfen: Zuordnung, Wechsel der Darstellungsform, Wortliste, Satzbaukasten • Sozialformen: Einzel-, Partner/innen- und Gruppenarbeit • Hinweise zur Durchführung: Die Aufgaben 1 bis 4 können gemeinsam oder einzeln je nach Bedarf eingesetzt werden und sind aufbauend sortiert.
Quellen	• Malle, Günther / Koth, Maria / Woschitz, Helge / Malle, Sonja / Salzger, Bernhard / Ulovec, Andreas (2014): *Mathematik verstehen 6*. Wien: ÖBV, S. 40.
Erstellerin	Kathrin Weissenbacher

Reelle Funktionen

Aufgabe 1: Vorwissen

Aus der 9. Schulstufe sind Ihnen lineare Funktionen und einige ihrer Eigenschaften schon bekannt.

Eine bekannte Definition im Zusammenhang mit Funktionen lautet folgendermaßen:

Die Menge $G = \{(x \mid f(x)) \mid x \in A\}$ **heißt Graph der Funktion f.**

1a) Ordnen Sie nun den einzelnen Komponenten der Definition ihre Bezeichnung zu.

1. x	a. Funktionswert (Wert) der Funktion f an der Stelle x
2. f(x)	b. Zahlenpaar; Punkt im Koordinatensystem
3. A	c. Stelle oder Argument
4. (x | f(x))	d. Definitionsmenge der Funktion f

1b) Beschreiben Sie zuerst in eigenen Worten folgende Eigenschaften einer Funktion. Verwenden Sie danach, die Bezeichnung der obigen Komponenten in Ihren Ausführungen. Vergleichen Sie Ihre Beschreibungen mit Ihrer Sitznachbarin/Ihrem Sitznachbarn.

- Eine Funktion f(x) steigt … ____________________

  ____

- Eine Funktion f(x) ist konstant … ____________________

  ____

- Eine Funktion f(x) fällt … ____________________

  ____

Reelle Funktionen

Aufgabe 2: Eigenschaften von Funktionen

Aus der 9. Schulstufe sind Ihnen folgende Eigenschaften von Funktionen bekannt:

- steigend
- konstant
- fallend

2a) Ordnen Sie nun den abgebildeten Funktionen die richtige Eigenschaft zu:

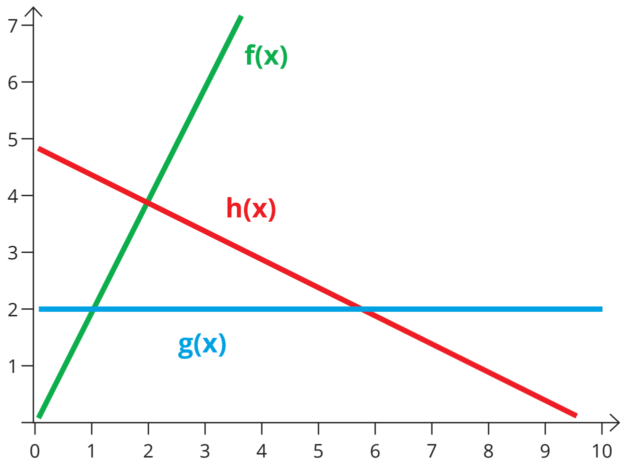


Abb. 1: Funktionen

Der Graph der Funktion f ist __________ .

Der Graph der Funktion g ist _________ .

Der Graph der Funktion h ist _________ .

2b) Geben Sie für jede der angegeben Eigenschaften für den Graph einer Funktion jeweils zwei weitere Bezeichnungen an. Verwenden Sie dazu Ihr Mathematikbuch oder Wörterbuch.

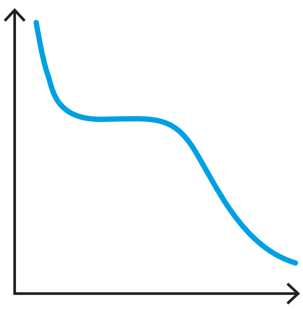
	Eigenschaft	Alternative	Alternative
1	steigt		
2	bleibt konstant		
3	fällt		

Reelle Funktionen

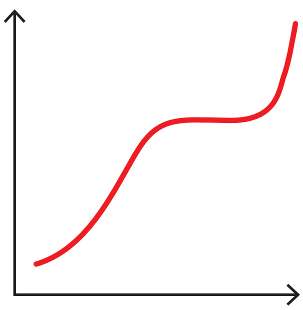
2c) Beschreiben Sie nun jede angegebene Eigenschaft jeweils in einem Satz mit einer Ihrer alternativen Bezeichnungen.

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

2d) Beschreiben Sie nun den Verlauf der folgenden reellen Funktionen mit eigenen Worten. Können Sie diesen Funktionen ein eindeutiges Steigungsverhalten zuordnen? Begründen Sie Ihre Antwort.



____
____
____
____



____
____
____
____

Abb. 2: Steigungsverhalten von Funktionen

Reelle Funktionen

Aufgabe 3: Monotonie

Um das Monotonieverhalten einer Funktion genau beschreiben zu können, liefert die mathematische Sprache gute Möglichkeiten. Verbinden Sie folgende Abschnitte zu vier vollständigen Regeln und schreiben Sie die korrekten Sätze in Ihr Heft. Ergänzen Sie dazu passende Abbildungen in Ihr Heft.

Eine Funktion f heißt

Eine Funktion f heißt

Eine Funktion f heißt

Eine Funktion f heißt

streng monoton steigend

streng monoton fallend

monoton steigend

monoton fallend

in einer Menge M,

in einer Menge M,

in einer Menge M,

in einer Menge M,

wenn für alle $x_1, x_2 \in M$

wenn für alle $x_1, x_2 \in M$

wenn für alle $x_1, x_2 \in M$

wenn für alle $x_1, x_2 \in M$

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Reelle Funktionen

Aufgabe 4: Monotonieverhalten

Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der in den folgenden Abbildungen dargestellten Graphen der Funktionen innerhalb der angegebenen Intervalle [a; c], [b; d], [c; d].

Beispiel: Im Intervall [a; b] ist die Funktion f(x) streng monoton fallend, weil für alle $a, b \in M$ gilt:

$a < b \rightarrow f(a) > f(b)$

Verwenden Sie dafür die bereits bekannten Bezeichnungen aus dieser Wortliste:

streng monoton fallend – streng monoton steigend – monoton steigend – monoton fallend

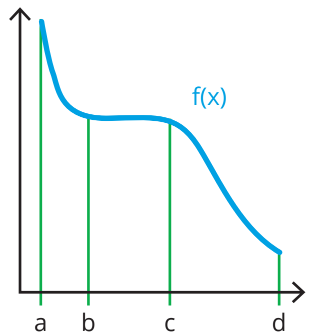


Abb. 3: Monotonieverhalten f(x)

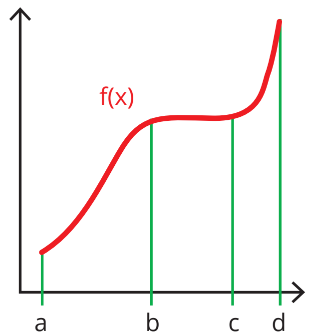


Abb. 4: Monotonieverhalten g(x)

Reelle Funktionen

Lösung – Aufgabe 1

1a)

1. x	c. Stelle oder Argument
2. f(x)	a. Funktionswert (Wert) der Funktion f an der Stelle x
3. A	d. Definitionsmenge der Funktion f
4. (x | f(x))	b. Zahlenpaar; Punkt im Koordinatensystem

1b)

- Eine Funktion f(x) steigt …
  z. B.: wenn für höhere Werte von x auch f(x) zunimmt.
  z. B.: wenn bei zunehmendem Argument x auch der dazugehörige Funktionswert f(x) zunimmt.
- Eine Funktion f(x) ist konstant …
  z. B.: wenn bei wachsendem x, f(x) konstant beim gleichen Wert bleibt. / f(x) ändert sich nie.
  z. B.: wenn bei zunehmendem Argument x der Funktionswert f(x) gleich bleibt.
- Eine Funktion f(x) fällt …
  z. B.: wenn für zunehmendes x, dann der Wert von f(x) abnimmt.
  z. B.: wenn bei zunehmendem Argument x der Funktionswert f(x) abnimmt.

Reelle Funktionen

Lösung – Aufgabe 2

2a)

Der Graph der Funktion f ist <u>steigend</u>.

Der Graph der Funktion g ist <u>konstant</u>.

Der Graph der Funktion h ist <u>fallend</u>.

2b)

	Eigenschaft	Alternative	Alternative
1	steigt	wächst	nimmt zu
2	bleibt konstant	bleibt gleich	bleibt unverändert
3	fällt	sinkt	nimmt ab

2d)

Der Graph der blauen Funktion ist zuerst fallend, dann konstant, dann wieder fallend. Insgesamt weist der Graph der blauen Funktion einen fallenden Funktionsverlauf auf.

Der Graph der roten Funktion ist zuerst steigend, dann konstant, dann wieder steigend. Insgesamt weist der Graph der roten Funktion einen steigenden Funktionsverlauf auf.

Reelle Funktionen

Lösung – Aufgabe 3

Die Funktion f heißt monoton steigend in einer Menge M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Die Funktion f heißt monoton fallend in einer Menge M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Die Funktion f heißt streng monoton steigend in einer Menge M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Die Funktion f heißt streng monoton fallend in einer Menge M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Lösung – Aufgabe 4

Abb.3.: Monotonieverhalten f(x)

Im Intervall [a; b] ist die Funktion f(x) streng monoton fallend, weil für alle $a, b \in M$ gilt:
$a < b \rightarrow f(a) > f(b)$

Im Intervall [a; c] ist die Funktion f(x) monoton fallend, weil für alle $a, c \in M$ gilt:
$a < c \rightarrow f(a) \geq f(c)$

Im Intervall [b; d] ist die Funktion f(x) monoton fallend, weil für alle $b, d \in M$ gilt:
$b < d \rightarrow f(b) \geq f(d)$

Im Intervall [c; d] ist die Funktion f(x) streng monoton fallend, weil für alle $c, d \in M$ gilt:
$c < d \rightarrow f(c) > f(d)$

Abb. 4: Monotonieverhalten g(x)

Im Intervall [a; b] ist die Funktion g(x) streng monoton steigend, weil für alle $a, b \in M$ gilt:
$a < b \rightarrow f(a) < f(b)$

Im Intervall [a; c] ist die Funktion g(x) monoton steigend, weil für alle $a, c \in M$ gilt:
$a < c \rightarrow f(a) \leq f(c)$

Im Intervall [b; d] ist die Funktion g(x) monoton steigend, weil für alle $b, d \in M$ gilt:
$b < d \rightarrow f(b) \leq f(d)$

Im Intervall [c; d] ist die Funktion g(x) streng monoton steigend, weil für alle $c, d \in M$ gilt:
$c < d \rightarrow f(c) \leq f(d)$