# Lineare Gleichungen in einer Variablen

| | |
|---|---|
| Unterrichtsfach | **Lehrplan HAK:**<br>• Mathematik und angewandte Mathematik<br>• 1. HAK (1. Jahrgang)<br>• 1. AUL (1. Jahrgang)<br><br>**Lehrplan HLW:**<br>• Mathematik und angewandte Mathematik<br>• 1. HLW (1. Jahrgang)<br><br>**Lehrplan HTL:**<br>• Mathematik und angewandte Mathematik<br>• 1. HTL (1. Jahrgang) |
| Schulstufe | • 9 |
| Themen | • Gleichungen<br>• Lineare Gleichungen in einer Variablen |
| Fachliche Vorkenntnisse | • Zahlenmengen<br>• Grundlagen der Algebra<br>• Variablen und Terme |
| Sprachliche Kompetenzen | • Die Bedeutung von Fachbegriffen verstehen können<br>• Die mathematischen Begriffe erklären können<br>• Selbständig mathematische Zusammenhänge formulieren können |

| | |
|---|---|
| Zeitbedarf | • 3-4 Unterrichtseinheiten à 50 Min. je nach Anzahl der eingesetzten Aufgaben |
| Material- & Medienbedarf | • Plakatpapier für Aufgabe 8 |
| Methodisch-didaktische Hinweise | • Sozialformen: Einzelarbeit und/oder Teamarbeit (2er oder 4er Teams)<br>• Methodische Tools: Wortliste, Lückentext, Zuordnung, Satzbaukasten, Strukturdiagramm, Lernplakat, Formulierungshilfen<br>• Die insgesamt 6 Aufgaben können auch einzeln eingesetzt werden.<br>• Aufgaben 1 und 6 eignen sich besonders für sprachlich schwächere Lernende. |
| Quelle | • Tinhof F., Fischer W. et al. (2013): Mathematik I HAK, S. 94, Wien, Trauner |
| Erstellerin | Sibylle Gratt |

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Aufgabe 1: Fachbegriffe zu Gleichungen und Termen

Ordnen Sie den Fachwörtern und Symbolen ihre mathematische Bedeutung zu.

| Fachwörter | Mathematische Bedeutung |
|---|---|
| Variable/ Unbekannte | Sinnvoller mathematischer Ausdruck; Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Symbolen |
| Term | Gleichsetzen von zwei Termen |
| Gleichung | Menge der rationalen Zahlen |
| Grundmenge G | Teilmenge der Definitionsmenge; ergibt wahre Aussage |
| Definitionsmenge D | Element von |
| Lösungsmenge L | Menge der ganzen Zahlen |
| Äquivalenz von Gleichungen | steht für eine Zahl |
| $\in$ | ohne |
| $\setminus$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{C}$ | Potenz einer Zahl |
| $\mathbb{N}$ | Teilmenge der Grundmenge; bestimmt Zahlen für Terme |
| $\mathbb{Z}$ | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | Gleichwertigkeit von Gleichungen |
| $\mathbb{R}$ | Zahlenmenge; gültig für die Unbekannten |
| Polynom | ist kein Element von |

Bilden Sie vollständige Sätze! (Beispiel: Eine Variable steht für eine Zahl).

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

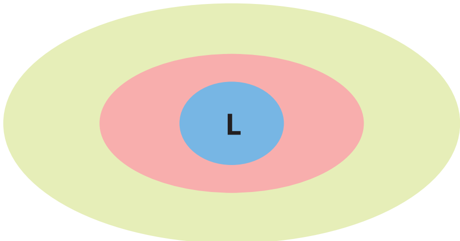
## Aufgabe 2: Mengen für die Lösung von Gleichungen und deren Verwendung

Vervollständigen Sie die Grafik, indem Sie die Mengen richtig eintragen.

Lösungsmenge L

Definitionsmenge D

Grundmenge G




Schreiben Sie die mathematischen Aussagen a –c als vollständige Sätze aus! Sie können dafür diese Formulierungshilfen verwenden:

Die Grundmenge ist …

Als Grundmenge werden …

Die Definitionsmenge beinhaltet …, ausgeschlossen ist …

Die Lösungsmenge lautet …

Die Lösungsmenge ist …

a) $G = \mathbb{Z}$; $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $L = \{3\}$

______________________________________________

______________________________________________

b) $G = \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $L = \{\,\}$

______________________________________________

______________________________________________

c) $G = \mathbb{N}$; $D = \mathbb{N}$; $L = \{17\}$

______________________________________________

______________________________________________

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Aufgabe 3: Grundlagen linearer Gleichungen

Füllen Sie den Lückentext zu den Grundlagen von Gleichungen aus!
Nutzen Sie die Wörterbox:

> lineare Gleichung – der Definitionsmenge – lösbar – äquivalent –
> die Grundmenge G – die Lösungsmengen – die Terme – wahren Aussage –
> das Gleichsetzen – eine Teilmenge

Durch ______________________ zweier Terme entsteht eine Gleichung.

______________________ einer Gleichung ist die Zahlenmenge, aus der man die Zahlen für die Variable entnehmen darf.

Die Definitionsmenge D einer Gleichung ist _____________________ der Grundmenge. Für diese Zahlen sind _______________ bestimmt.

Die Lösungsmenge L einer Gleichung ist eine Teilmenge _________________________. Ihre Zahlen machen die Gleichung zu einer ____________________________.

Eine Gleichung heißt _________________, wenn die Lösungsmenge L wenigstens eine Zahl enthält.

Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn ____________________ gleich sind.

Eine Gleichung, die sich __________________ zu $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ umformen lässt, heißt _______________________ oder Gleichung ersten Grades mit der Variable x.

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Aufgabe 4: Lösungsfälle linearer Gleichungen

Schneiden Sie die Satzteile aus, legen Sie sie in der richtigen Reihenfolge auf und kleben Sie sie in Ihr Heft. Es ergeben sich drei mathematische Aussagen.

Bilden Sie anschließend selbst zwei Sätze, die sich inhaltlich mit den Lösungsfällen mathematischer Gleichungen auseinandersetzen.

Für lösbare Gleichungen

enthalten in der Grundmenge G

Unlösbare Gleichungen

das die Gleichung in eine wahre Aussage überführt

gibt es zumindest

ein Element in der Definitionsmenge D,

das die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.

alle Elemente der Grundmenge

Die Lösungsmenge ist gleich

Für eine allgemeingültige Gleichung gilt:

der Grundmenge. Das bedeutet,

erfüllen die Aussage

kein Element

Tinhof F., Fischer W. et al. (2013): Mathematik I HAK, Wien, Trauner S. 94.

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Aufgabe 5: Äquivalenzumformungen

Finden Sie zu den mathematischen Aussagen die passenden Äquivalenzumformungen.

**Aussagen:**

1. Eine Gleichung behält dieselbe Wertigkeit, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term addiert.
2. Eine Gleichung ist äquivalent, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term subtrahiert.
3. Eine Gleichung führt man in eine äquivalente Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit demselben Term ungleich Null multipliziert.
4. Der Wert einer Gleichung bleibt gleich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung durch denselben Term ungleich Null dividiert.
5. Durch Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung ändert sich ihre Wertigkeit nicht.

**Äquivalenzumformungen:**

$x + 5 = 2 \qquad \backslash -5$
$x = -3$

$2x = 12 \qquad \backslash :5$
$x = 6$

$x - 5 = 2 \qquad \backslash +5$
$x = 7$

$5 = x$
$x = 5$

$\frac{x}{2} = 2 \qquad \backslash \cdot 2$
$x = 4$

Bilden Sie sinnvolle Sätze!

| | | | |
|---|---|---|---|
| Die Umkehroperation zur | Division<br>Addition<br>Subtraktion<br>Multiplikation | ist die | Division<br>Addition<br>Subtraktion<br>Multiplikation |

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Aufgabe 6: Lösungsverlauf von einfachen Bruchgleichungen

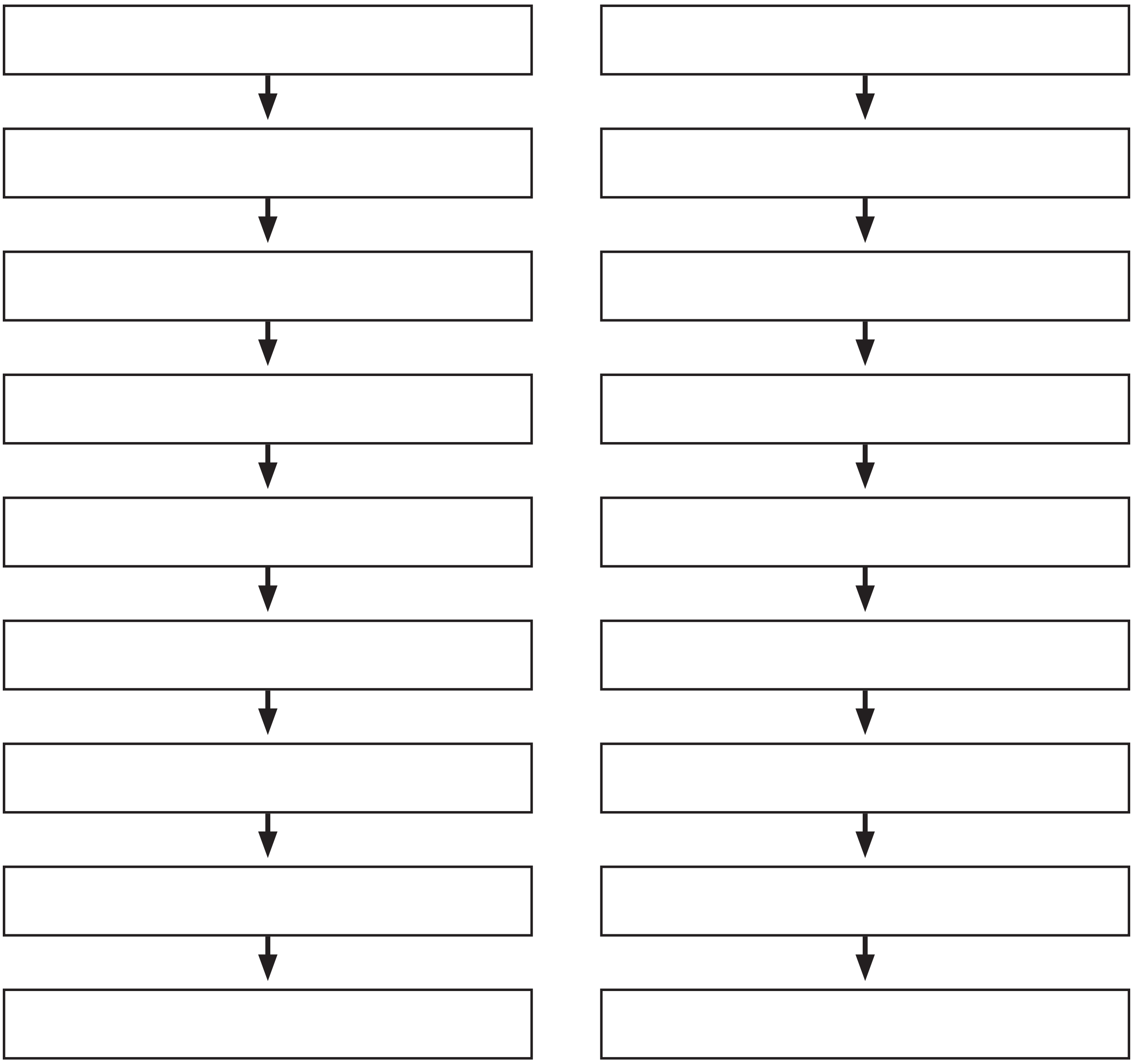
Erstellen Sie ein Flussdiagramm für den Lösungsverlauf einer einfachen Bruchgleichung in einer Variablen. Verwenden Sie vorerst die angegebene Gleichung.

Erstellen Sie im Anschluss ein Lernplakat nach unten gezeigtem Schema und beschreiben Sie dabei die einzelnen Schritte für die Lösung von Bruchgleichungen.

Lösen Sie die Gleichung in der Menge der reellen Zahlen.

$\frac{2}{x-5} + 3 = 5$

Allgemein:



# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Lösung – Aufgabe 1: Fachbegriffe zu Gleichungen und Termen

| Fachwörter | Mathematische Bedeutung |
|---|---|
| Variable/ Unbekannte | Steht für eine Zahl |
| Term | Sinnvoller mathematischer Ausdruck; Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Symbolen |
| Gleichung | Gleichsetzen von zwei Termen |
| Grundmenge G | Zahlenmenge; gültig für die Unbekannten |
| Definitionsmenge D | Teilmenge der Grundmenge; bestimmt Zahlen für Terme |
| Lösungsmenge L | Teilmenge der Definitionsmenge; ergibt wahre Aussage |
| Äquivalenz von Gleichungen | Gleichwertigkeit von Gleichungen |
| $\in$ | Element von |
| $\setminus$ | ohne |
| $\mathbb{C}$ | Potenz einer Zahl |
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{Z}$ | Menge der ganzen Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | Menge der rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen |

**Beispiele:**

Eine Variable oder Unbekannte ist ein Platzhalter für eine Zahl.

Ein Term ist ein sinnvoller mathematischer Ausdruck. Er ist eine Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Symbolen.

Eine Gleichung entsteht durch Gleichsetzen von zwei Termen.

Die Grundmenge G ist jene Zahlenmenge, die gültig für die Variablen ist.

Die Definitionsmenge D ist eine Teilmenge der Grundmenge, welche die Zahlen für die Terme bestimmt.

Die Lösungsmenge L ist eine Teilmenge der Definitionsmenge und macht die Gleichung zu einer wahren Aussage.

Äquivalenz bedeutet Gleichwertigkeit zweier Gleichungen.

$\in$ bedeutet „ist ein Element von“.

Das Zeichen \ heißt „ohne“.

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. {0, 1, 2, 3, 4, ...}

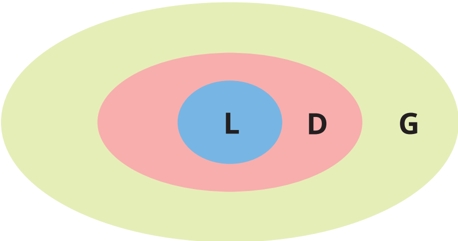
$\mathbb{Z}$ beschreibt die Menge der ganzen Zahlen. {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

$\mathbb{Q}$ ist der Zahlenraum der rationalen Zahlen.

$\mathbb{R}$ steht für die Menge der reellen Zahlen.

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Lösung – Aufgabe 2: Mengen für die Lösung von Gleichungen und deren Verwendung




a) $G = \mathbb{Z}$; $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $L = \{3\}$

Die Grundmenge ist die Menge der ganzen Zahlen. Die Definitionsmenge beinhaltet die ganzen Zahlen ohne Null. Die Lösungsmenge lautet 3.

b) $G = \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $L = \{\ \}$

Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Definitionsmenge sind die reellen Zahlen, wobei -3 ausgeschlossen ist. Die Lösungsmenge ist leer.

c) $G = \mathbb{N}$; $D = \mathbb{N}$; $L = \{17\}$

Als Grundmenge werden die natürlichen Zahlen angenommen. Auch die Definitionsmenge sind die natürlichen Zahlen. Die Lösungsmenge ist 17.

## Aufgabe 3: Grundlagen linearer Gleichungen

Durch das Gleichsetzen zweier Terme entsteht eine Gleichung. Die Grundmenge G einer Gleichung ist die Zahlenmenge, aus der man die Zahlen für die Variable entnehmen darf. Die Definitionsmenge D einer Gleichung ist eine Teilmenge der Grundmenge. Für diese Zahlen sind die Terme bestimmt. Die Lösungsmenge L einer Gleichung ist eine Teilmenge der Definitionsmenge. Ihre Zahlen machen die Gleichung zu einer wahren Aussage. Eine Gleichung heißt lösbar, wenn die Lösungsmenge L wenigstens eine Zahl enthält. Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn die Lösungsmengen gleich sind. Eine Gleichung, die sich äquivalent zu $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ umformen lässt, heißt lineare Gleichung oder Gleichung ersten Grades mit der Variable x.

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Lösung –Aufgabe 4: Lösungsfälle linearer Gleichungen

Die drei mathematischen Aussagen des Textpuzzles:

> Für lösbare Gleichungen gibt es zumindest ein Element in der Definitionsmenge, das die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.
>
> Unlösbare Gleichungen enthalten in der Grundmenge G kein Element, das die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.
>
> Für eine allgemeingültige Gleichung gilt: Die Lösungsmenge ist gleich der Grundmenge. Das bedeutet, alle Elemente der Grundmenge erfüllen die Aussage.

## Lösung –Aufgabe 5: Äquivalenzumformungen

| | |
|---|---|
| 1. Eine Gleichung behält dieselbe Wertigkeit, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term addiert. | $x - 5 = 2 \quad \backslash +5$<br>$x = 7$ |
| 2. Eine Gleichung ist äquivalent, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term subtrahiert. | $x + 5 = 2 \quad \backslash -5$<br>$x = -3$ |
| 3. Eine Gleichung führt man in eine äquivalente Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit demselben Term ungleich Null multipliziert. | $\frac{x}{2} = 2 \quad \backslash \cdot 2$<br>$x = 4$ |
| 4. Der Wert einer Gleichung bleibt gleich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung durch denselben Term ungleich Null dividiert. | $2x = 12 \quad \backslash :5$<br>$x = 6$ |
| 5. Durch Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung ändert sich ihre Wertigkeit nicht. | $5 = x$<br>$x = 5$ |

Die Umkehroperation zur Division ist die Multiplikation.
Die Umkehroperation zur Addition ist die Subtraktion.
Die Umkehroperation zur Subtraktion ist die Addition.
Die Umkehroperation zur Multiplikation ist die Division.

# Lineare Gleichungen in einer Variablen

## Lösung – Aufgabe 6: Lösungsverlauf von einfachen Bruchgleichungen

| $\frac{2}{x-5} + 3 = 5$ | Allgemein: |
|---|---|
| $G = \mathbb{R}$ | Festlegen der Grundmenge |
| $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ | Ermitteln der Definitionsmenge |
| $\frac{2}{x-5} + 3 = 5 \quad /-3$ | Isolieren der Variablen |
| $\frac{2}{x-5} = 2 \quad / \cdot\ (x-5)$ | Gleichung bruchfrei machen |
| $2 = 2 \cdot (x-5)$ | Ausmultiplizieren, Vereinfachen |
| $2 = 2x - 10 \quad / +10$ | Isolieren der Variablen |
| $12 = 2x \quad / 2$ | Ausdruck der einfachen Variable |
| $x = 6$ | Lösung |
| $L = \{6\}$ | Angabe der Lösungsmenge |