Quadratische Gleichungen und Funktionen

Unterrichtsfach	**Lehrplan HAK:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 2. HAK (2. Jahrgang), 3. Semester – Kompetenzmodul 3 - 1. AUL (1. Jahrgang) **Lehrplan HLW:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 3. Semester – Kompetenzmodul 3 **Lehrplan HTL:** • Mathematik und angewandte Mathematik - 3. Semester – Kompetenzmodul 3
Schulstufe	• 10. Schulstufe (2. Jg./Klasse)
Thema	• Quadratische Funktionen der Form: - $f(x)= ax^2$; $f(x) = ax^2 + c$ und $f(x) = ax^2 + bx + c$ • Lösungsformen von quadratischen Gleichungen der Form: - $ax^2 = 0$; $ax^2 + c=0$ und $ax^2 + bx + c = 0$ • Diskriminante
Fachliche Vorkenntnisse	• Äquivalenzumformungen • Funktionsbegriff • Lösungsformeln für quadratische Gleichungen
Sprachliche Kompetenzen	• Fachbegriffe im Zusammenhang von Funktionen, • Gleichungen erklären und anwenden können • Grafen interpretieren und im Fachvokabular beschreiben können • Fachbegriffe im Zusammenhang von Funktionen anwenden können

Zeitbedarf	• 2–3 Unterrichtseinheiten à 50 Minuten (je nach Anzahl der eingesetzten Übungen)
Material- & Medienbedarf	–
Methodisch-didaktische Hinweise	• Sozialformen: Einzelarbeit und/oder Teamarbeit (2er oder 4er Teams) • Methodische Tools: Wortschatzerweiterung, Textpuzzle, Wortgeländer, Wortliste, Lückentext, Zuordnung • Die Unterlage beinhaltet mehrere unabhängige Beispiele. Aufgabe 1 und 2 beziehen sich auf denselben Text.
Quellen	–
Erstellerin	Sibylle Gratt

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 1: Definition der allgemeinen quadratischen Gleichung und Normalform der quadratischen Gleichung

Lesen Sie den folgenden Text zu quadratischen Gleichungen.

a) Unterstreichen Sie jene Wörter, die Sie während des Mathematikunterrichts bereits kennengelernt haben.

b) Überlegen Sie, wie Sie jemandem ohne Vorkenntnis diese Wörter erklären können. Schreiben Sie fünf dieser Erklärungen in ganzen Sätzen auf.

c) Vergleichen Sie Ihre Erklärungen in 2er oder 3er Teams. Wer hat die beste Erklärung?

In einer linearen Gleichung kommt die Gleichungsvariable nur als Linearkombination vor. Dies entspricht x hoch 1 (x^1). In vielen Aufgaben werden allerdings Variablen verwendet, welche nicht in Linearkombinationen vorkommen. Die Variable kann quadratisch oder in einer höheren Potenz vorkommen. Man spricht dann von quadratischen Gleichungen oder bei höheren Potenzen von Gleichungen höheren Grades. Die größte vorkommende Potenz gibt damit den Grad der Gleichung an. Zum Beispiel spricht man bei der Gleichung $f(x) = y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ von einer Gleichung 4. Grades. Eine quadratische Gleichung ist etwa $f(x) = y = 3x^2 - 9x$, diese wird auch Polynomfunktion 2. Grades genannt. Allgemein werden Funktionen höheren Grades wie folgt geschrieben: $f(x) = y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Setzt man in eine Funktion 2. Grades für $y = 0$ ein, erhält man eine quadratische Gleichung.

Man kann eine quadratische Gleichung allgemein in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit beliebigen Konstanten a, b und c ($a \neq 0$) anschreiben. Die Gleichungsvariable ist x.

Dividiert man die allgemeine Form der quadratischen Gleichung durch den Koeffizienten a, so erhält man die Normalform der quadratischen Gleichung. Diese lautet $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Üblicherweise setzt man für $\frac{b}{a} = p$ und für $\frac{c}{a} = q$ ein. Die Normalform einer quadratischen Gleichung lautet somit $x^2 + px + q = 0$.

Die Definitionsmenge ergibt sich häufig aus der Aufgabenstellung, ist keine Definitionsmenge vorgegeben gilt $\mathbb{R}$ als Grundmenge.

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 2

Lesen Sie den Text aus Aufgabe 1 noch einmal durch.

a) Unterstreichen Sie nun Ausdrücke, die für Sie neu sind in einer zweiten Farbe.

b) Diskutieren Sie mit Ihrer Sitznachbarin/Ihrem Sitznachbarn die Bedeutung dieser Ausdrücke.

★ **Tipp:** Falls notwendig recherchieren Sie in Ihrem Mathematikbuch oder im Internet die Bedeutung dieser mathematischen Ausdrücke.

c) Verfassen Sie richtige und falsche Sätze und lassen Sie Ihre Sitznachbarin/Ihren Sitznachbarn die Sätze korrigieren.

	richtig	falsch

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 3: Lösung quadratischer Gleichungen

Formulieren Sie die Lösungsschritte der folgenden Gleichungen in ganzen Sätzen. Falls Sie Schwierigkeiten bei der Formulierung haben, verwenden Sie als Hilfestellung die unten angegebenen Wortgeländer.

$a \cdot x^2 + c = 0$ mit $a \neq 0$	$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$ mit $a \neq 0, b \neq 0$	$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Die Lösung der Gleichung $ax^2 + c = 0$ kann man durch … – Man subtrahiert … und dividiert anschließend durch … – Mit der Quadratwurzel erhält man … – In der Gleichung $ax^2 + bx = 0$ fehlt… – Hebt man …, erhält man $x \cdot (ax + b) = 0$. – Der Produkt-Null-Satz besagt, … – Eine Lösung ergibt sich … – Der zweite Faktor der Gleichung $(ax + b)$ muss … – Durch Umformung erhält man… – Um die Lösung der allgemeinen Form einer quadratischen Gleichung zu finden benötigt man … Dafür benötigt man die Koeffizienten … wobei … – Die Koeffizienten werden … – Somit ergeben sich die beiden … – Durch Division durch den Koeffizienten a kann … – Zur Lösung einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ verwendet man … – Hierfür verwendet man … – Diese werden in die Formel … – Man erhält …

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 4: Lösungsfälle von quadratischen Gleichungen der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ und $x^2 + p \cdot x + q =$

4a) Lesen Sie den folgenden Text alleine durch.

Dem Ausdruck unter den Wurzeln der beiden Lösungsformeln quadratischer Gleichungen

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie werden als Diskriminante bezeichnet und werden mit D abgekürzt. In der allgemeinen Form ist $D = b^2 - 4ac$; in der Normalform ergibt sich die Diskriminante zu $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

Der Wert der Diskriminante gibt Aufschluss über die Lösungsfälle der quadratischen Gleichung.

Ist die Diskriminante $D < 0$, ergibt sich die Wurzel einer negativen Zahl. Diese kann in $\mathbb{R}$ nicht gezogen werden. Das bedeutet, dass keine reelle Lösung möglich ist und die Lösungsmenge somit die leere Menge $L = \{\}$ ist.

Ergibt die Diskriminante den Wert null ($D = 0$), so muss die Wurzel aus null gezogen werden, die wiederum null ergibt. Somit existiert nur eine Lösung und $x_1 = x_2$. Die Lösungsmenge ist $L = \{x_{1,2}\}$.

Ist der Wert der Diskriminante $D > 0$, erhält man eine positive Zahl, deren Wurzel gezogen werden kann. Somit ergeben sich zwei unterschiedliche Lösungen der quadratischen Gleichung: $L = \{x_1, x_2\}$.

Quadratische Gleichungen und Funktionen

4b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Die Diskriminante gibt an, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat.		
Ist der Wert der Diskriminante kleiner null, hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen.		
Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ergibt zwei Lösungen.		
Ergibt die Diskriminante null, hat die Gleichung eine Lösung.		
Zwei Lösungen hat eine quadratische Gleichung, deren Diskriminante größer als null ist.		
Die Diskriminante entspricht der Wurzel der Lösungsformel.		
Die Gleichung $x^2 + 10x + 24 = 0$ hat die Diskriminante $D = (25 - 24) = 1$.		
Die Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat die Diskriminante $D = 0$.		
Aus der Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ ergeben sich zwei Lösungen.		
Jede quadratische Gleichung hat eine reelle Lösung.		

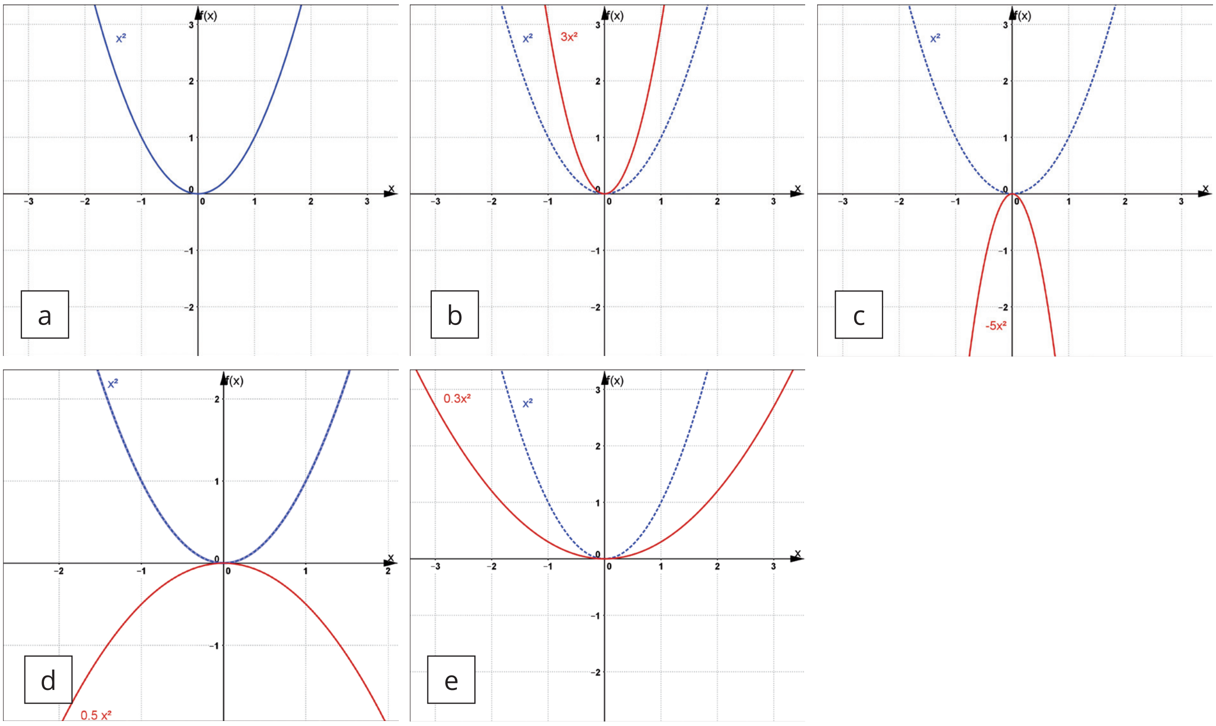
Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 5: Quadratische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2$

Die folgenden Grafen a bis e zeigen Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2$, wobei a eine reelle Zahl und ungleich null ist ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

5a) Beschreiben Sie die einzelnen Grafen mit jeweils 4 ganzen Sätzen. Vergleichen Sie in den Grafen b bis e den jeweiligen Grafen mit der Normparabel und erklären Sie die Veränderung in einem Satz. Nehmen Sie dazu die gegebene Wortliste zur Hilfe.

Parabel – Normalparabel (auch Normparabel) – tiefster Punkt – breiter – steiler – Scheitel – höchster Punkt – Koordinatenursprung – Scheitelpunkt – y-Achse – flacher – nach unten geöffnet – gestaucht – gestreckt – schmäler – nach oben geöffnet



5b) Ordnen Sie nun den Grafen die folgenden mathematischen Ausdrücke zu (Mehrfachnennungen sind möglich):

(1) $|a| > 1$ (2) $a < 0$ (3) Normparabel (4) $|a| < 1$ (5) $a > 0$

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 6: Quadratische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2 + c$

Vergleichen Sie die die drei Funktion f, g und h. Vervollständigen Sie anschließend den Lückentext.

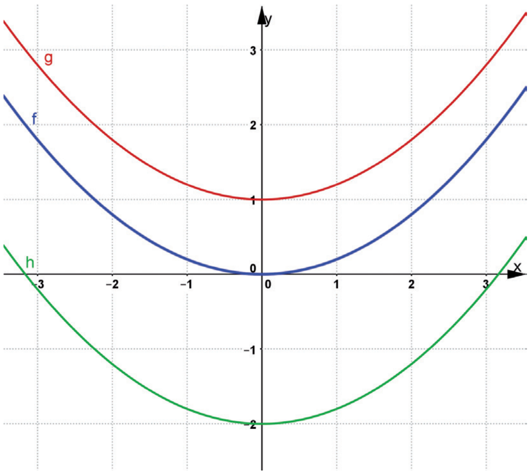


Abb. 1: Funktionen

Die drei Funktionen ____________________ sich im Parameter c. Der _________ Graf schneidet die y-Achse im ________________________. Sein ___________ liegt somit im Punkt (0|0).

Die Funktion g ist gegenüber der Funktion f um eine Einheit ____________________. Die Funktion h ist dagegen um _______________ nach unten verschoben.

Der Scheitel der Funktion h liegt bei __________. Im Punkt (0|1) liegt der Scheitel der ______________.

Aus den gegebenen Grafen lässt sich schließen, dass der _________________ angibt, an welchem Punkt die Funktion die _______________ schneidet.

f(x) = ___________ g(x) = ___________ h(x) = ___________

Scheitel – (0|-2) – $0{,}2x^2 + 1$ – Parameter c – blaue – nach oben verschoben – $0{,}2x^2$ – zwei Einheiten – y-Achse – Koordinatenursprung – unterscheiden – Funktion g – $0{,}2x^2 - 2$

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 7: Quadratische Funktionen der Form f(x) = ax² + bx + c

Gegeben ist die Funktion $f(x) = y = 0{,}5x^2 + 2x - 1$. Der Graf der Funktion ist in der folgenden Abbildung 2 dargestellt.

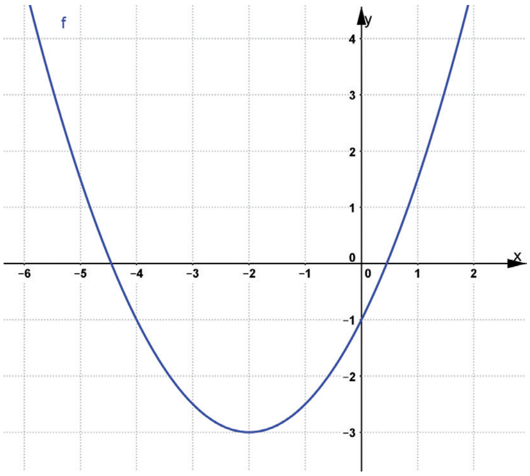


Abb. 2: Funktion f(x)

7a) Geben Sie die Koeffizienten a, b und c an: a = b = c =

7b) Geben Sie den y-Achsen-Schnittpunkt an: y_S =

7c) Lesen Sie den Scheitelpunkt im Grafen ab: S(|)

7d) Ermitteln Sie mit einer der beiden Lösungsformeln quadratischer Gleichungen die Nullstelle(n) der Funktion.

7e) Vergleichen Sie die angegebene Funktion mit der Normparabel. Erklären Sie Ihrer Sitznachbarin/ Ihrem Sitznachbarn in ganzen Sätzen, worin sich die beiden Funktionen unterscheiden. Geben Sie die Änderungen in der folgenden Tabelle an.

	y-Schnittpunkt	Scheitelpunkt	Nullstelle(n)	Verschiebung in x-Richtung	Verschiebung in y-Richtung
Normparabel					
$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$					

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 8: Anwendung einer quadratischen Funktion

Betrachten Sie folgenden Grafen. Wählen Sie einen passenden Kontext und beschreiben Sie in diesem Zusammenhang die Funktion! Nutzen Sie dafür die Wortliste.

h(x) – parabelförmig – Definitionsmenge – Wertemenge – maximale Höhe – Nullstelle – Intervall – horizontale Entfernung – Meter – vertikale Achse – Wurfbewegung

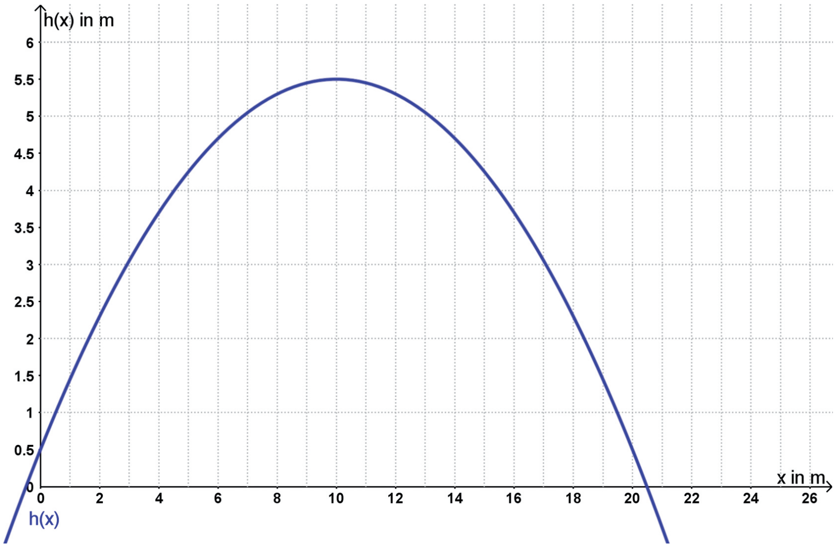


Abb. 3: Funktion h(x)

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgabe 9: Erstellen eines Aufgabenmodells

Überlegen Sie zum Grafen aus Aufgabe 8 eine mögliche Aufgabenstellung.

Benutzen Sie als Funktion $h(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x + 0{,}5$.

Geben Sie in Ihrer Aufgabenstellung die Bedeutung von x und h(x) an.

Diskutieren Sie mit einem Kollegen, welche Fragestellungen in Ihrer Aufgabe behandelt werden bzw. welche weiteren Fragestellungen möglich sind. Tauschen Sie anschließend mit einem weiteren Kollegen Ihr Beispiel aus und versuchen Sie, die erhaltene Aufgabenstellung zu lösen.

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Lösung – Aufgabe 3

Wurzelziehen: Die Gleichung $ax^2 + c = 0$ kann man durch Wurzelziehen finden. Dazu formt man die Gleichung um. Man subtrahiert das absolute Glied c und dividiert anschließend durch den Parameter a. Mit der Quadratwurzel erhält man die beiden Lösungen für x1 und x2.

Produkt-Null-Satz: Fehlt bei der quadratischen Gleichung das absolute Glied, erhält man die Form $ax^2 + bx = 0$. Hebt man in dieser Gleichung x heraus erhält man $x \cdot (ax + b) = 0$. Der Produkt-Null-Satz besagt, ein Produkt ist genau dann null, wenn ein Faktor gleich null ist. Eine Lösung ergibt sich also bereits durch das herausgehobene x, dies ist der erste Faktor, welcher null ist $x_1 = 0$. Der zweite Faktor der Gleichung $(ax + b)$ muss laut Produkt-Null-Satz ebenfalls null sein. Man schreibt also $(ax + b) = 0$ und durch Umformung erhält man für $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Formelanwendung: Um die Lösung der allgemeinen Form einer quadratischen Gleichung mit $ax^2 + bx + c = 0$ zu finden, benötigt man die „große Lösungsformel". Dafür benötigt man die Parameter a, b und c, wobei $a \neq 0$ ist. Die Parameter werden in die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

eingesetzt. Somit ergeben sich die beiden Lösungen für x_1 und x_2. Den Vorzeichen der Parameter muss man dabei besondere Beachtung schenken.

Durch Division durch den Parameter a kann jede Gleichung der allgemeinen Form in die Normalform übergeführt werden. Zur Lösung einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ verwendet man die „kleine Lösungsformel". Hierfür verwendet man die beiden Parameter p und q. Diese werden in die Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

eingesetzt. Man erhält die beiden Lösungen für x_1 und x_2.

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Lösung – Aufgabe 4b

	richtig	falsch
Die Diskriminante gibt an, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat.	X	
Ist der Wert der Diskriminante kleiner null, hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen.		X
Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ergibt zwei Lösungen.		X
Ergibt die Diskriminante null, hat die Gleichung eine Lösung.	X	
Zwei Lösungen hat eine quadratische Gleichung, deren Diskriminante größer als null ist.	X	
Die Diskriminante entspricht der Wurzel der Lösungsformel.		X
Die Gleichung $x^2 + 10x + 24 = 0$ hat die Diskriminante $D = (25 - 24) = 1$.	X	
Die Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat die Diskriminante $D = 0$.		X
Aus der Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ ergeben sich zwei Lösungen.	X	
Jede quadratische Gleichung hat eine reelle Lösung.		X

Lösung – Aufgabe 5

(1): b, c (2): c, d (3): a (4): d, e (5): a, b, e

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Lösung – Aufgabe 6

Die drei Funktionen unterscheiden sich im Parameter c. Der blaue Graf schneidet die y-Achse im Koordinatenursprung. Sein Scheitel liegt somit im Punkt (0|0).

Die Funktion g ist gegenüber der Funktion f um eine Einheit nach oben verschoben. Die Funktion h ist dagegen um zwei Einheiten nach unten verschoben.

Der Scheitel der Funktion h liegt bei (0|-2). Im Punkt (0|1) liegt der Scheitel der Funktion h.

Aus den gegebenen Grafen lässt sich schließen, dass der Parameter c angibt, an welchem Punkt die Funktion die y-Achse schneidet.

$f(x) = 0{,}2x^2$ $g(x) = 0{,}2x^2 + 1$ $h(x) = 0{,}2x^2 - 2$

Lösung – Aufgabe 7

7a) $a = 0{,}5$ $b = 2$ $c = –1$

7b) yS = –1

7c) S(-2 |-3)

7d) x1 = 0,45 x2 = -4,45 N1(0,45|0), N2(-4,45|0)

7e)

	y-Schnitt-punkt	Schei-tel-punkt	Nullstel-le(n)	Verschie-bung in x-Richtung	Verschie-bung in y-Richtung
Normpara-bel	0	(0|0)	(0|0)	keine	keine
$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x – 1$	–1	(–2|–3)	$N_1(0{,}45\|0)$ $N_2(–4{,}45\|0)$	–2	–1